Semana 16

- Se sugiere antes de resolver los ejercicios ver los videos de YouTube de los temas correspondientes así como también leer la bibliografía recomendada y el material teórico subido en el campus del curso.
- A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos y algunas observaciones para resolver los ejercicios 1 a 9 de la Guía 5. Los ejercicios propuestos que no están en la guía (pero que se relacionan con los mismos) no tienen numeración.

En lo que sigue, vamos a tomar como cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y vamos a considerar el producto interno canónico, definido por $\langle x, y \rangle = y^* x$, para $x, y \in \mathbb{K}^n$.

Dada $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, notar que (si consideramos el producto interno canónico) vale

$$\langle Ax, y \rangle = y^*(Ax) = (A^* y)^*(x) = \langle x, A^* y \rangle,$$

para todo $x \in \mathbb{K}^n$, $y \in \mathbb{K}^m$.

Matrices unitarias y ortogonales

Sea $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, entonces diremos que U es *unitaria* si $UU^* = U^*U = I$. Si $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $UU^T = U^T U = I$, diremos que U es *ortogonal*.

Observar que $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es unitaria, si y sólo si $U^{-1} = U^*$ y $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es ortogonal, si y sólo si $U^{-1} = U^T$.

Por ejemplo, la matriz $U := \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ es unitaria, pues

$$\begin{aligned} UU^* &= \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \\ &= \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = U^* U. \end{aligned}$$

La matriz, $P := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ es ortogonal. Pues $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y

$$\begin{aligned} PP^T &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = P^T P. \end{aligned}$$

Observación:
Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que existe $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que

$$AB = I,$$

entonces

$$BA = I \text{ y } A^{-1} = B.$$

De hecho, si existe $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que $AB = I$, entonces,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(I) = 1 \neq 0.$$

Por lo tanto, $\det(A) \neq 0$. Entonces, existe A^{-1} y multiplicando a izquierda por A^{-1} tenemos que

$$B = A^{-1}(AB) = A^{-1}I = A^{-1}.$$

Entonces $A^{-1} = B$, por lo tanto, también vale que $BA = A^{-1}A = I$.

Eso significa que (por ejemplo) dada $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, basta ver que $UU^* = I$ ó que $U^*U = I$ para concluir que U es unitaria.

Caracterización de las matrices unitarias (ortogonales)

Proposición 1. *Sea $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces, son equivalentes:*

i) *U es unitaria,*

ii) *U^* es unitaria,*

iii) *U es inversible y $U^{-1} = U^*$,*

iv) *U preserva el producto interno (canónico), es decir*

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle,$$

para todo $x, y \in \mathbb{C}^n$.

v) *Si $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una bon de $\mathbb{C}^n$, entonces $\{Uv_1, Uv_2, \cdots, Uv_n\}$ también es una bon de $\mathbb{C}^n$.*

vi) *Las columnas de U forman una bon de $\mathbb{C}^n$.*

vii) *Las filas de U forman una bon de $\mathbb{C}^n$.*

viii) *U es una* isometría*, es decir*

$$\|Ux\| = \|x\|$$

para todo $x \in \mathbb{C}^n$.

Dem. $i) \Rightarrow ii)$: Si U es unitaria, entonces $UU^* = I$ y $U^*U = I$, entonces, trivialmente tenemos que $U^*U = I$ y $UU^* = I$, por lo tanto U^* es unitaria.

$ii) \Rightarrow iii)$: Si U^* es unitaria, entonces $UU^* = I$ y $U^*U = I$, eso implica como vimos arriba que $U^{-1} = U^*$.

$iii) \Rightarrow iv)$: Si $U^{-1} = U^*$. Entonces, para todo $x, y \in \mathbb{C}^n$, tenemos que

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, U^*Uy \rangle = \left\langle x, U^{-1}Uy \right\rangle = \langle x, Iy \rangle = \langle x, y \rangle .$$

$iv) \Rightarrow v)$: Si $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una bon de $\mathbb{C}^n$, entonces $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$, donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (la *delta de Kronecker*). Usando $iv)$, tenemos que

$$\langle Uv_i, Uv_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Por lo tanto, $\{Uv_1, Uv_2, \cdots, Uv_n\}$ también es una bon de $\mathbb{C}^n$.

$v) \Rightarrow vi)$: Supongamos que $U := [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n]$, donde $u_i \in \mathbb{C}^n$ es la i-ésima columna de U. Sea $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{C}^n$, que es una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$. Entonces

$$Ue_1 = u_1, \ Ue_2 = u_2, \cdots, Ue_n = u_n.$$

Usando $v)$, tenemos que el conjunto

$$\{Ue_1, Ue_2, \cdots, Ue_n\} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

es una bon de $\mathbb{C}^n$. Por lo tanto, las columnas de U forman una bon de $\mathbb{C}^n$.

$vi) \Rightarrow vii)$: Supongamos que $U = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n]$, donde $u_i \in \mathbb{C}^n$ es la i-ésima columna de U. Por hipótesis, $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ es una bon de $\mathbb{C}^n$, entonces

$$U^*U = \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{bmatrix} [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n] = \begin{bmatrix} u_1^*u_1 & u_1^*u_2 & \cdots & u_1^*u_n \\ u_2^*u_1 & u_2^*u_2 & \cdots & u_2^*u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n^*u_1 & u_n^*u_2 & \cdots & u_n^*u_n \end{bmatrix} = I.$$

Entonces, U es unitaria. Tomando conjugado en la ecuación anterior, tenemos que

$$I = \overline{I} = \overline{U^*U} = \overline{U^*} \ \overline{U} = U^T(U^T)^*.$$

Entonces U^T es unitaria. Como ya probamos que $i) \Rightarrow vi)$ (porque probamos $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv) \Rightarrow v) \Rightarrow vi)$), tenemos que las columnas de U^T forman una bon de $\mathbb{C}^n$. Como las columnas de U^T son las filas de U, concluimos entonces que las filas de U forman una bon de $\mathbb{C}^n$.

$vii) \Rightarrow viii)$: Si las filas de U forman una bon de $\mathbb{C}^n$ entonces las columnas de U^T (que son las filas de U) forman una bon de $\mathbb{C}^n$. Entonces, operando de manera similar que en $vi) \Rightarrow vii)$, tendremos que vale que $(U^T)^*U^T = \overline{U}U^T = I$. Entonces, $I = I^T = (\overline{U}U^T)^T = UU^*$, entonces U es unitaria. Como ya probamos que $i) \Rightarrow iv)$ (porque probamos $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv)$), se sigue en particular que, para todo $x \in \mathbb{C}^n$

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2.$$

$viii) \Rightarrow i)$: Si $\|Ux\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$. Entonces,

$$\langle\, Ux, Ux \,\rangle = \langle\, U^*Ux, x \,\rangle = \langle\, Ix, x \,\rangle\,,$$

para todo $x \in \mathbb{C}^n$. Entonces

$$\langle\, (U^*U - I)x, x \,\rangle = \langle\, U^*Ux - x, x \,\rangle = \langle\, U^*Ux, x \,\rangle - \langle\, x, x \,\rangle = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{C}^n$.

Llamemos $A := U^*U - I$. Observar que, si $z, w \in \mathbb{C}^n$ (hacer la cuenta) vale la *fórmula de polarización*: $\langle\, Az, w \,\rangle = \langle\, A(z+w), z+w \,\rangle + i \,\langle\, A(z+iw), z+iw \,\rangle + (-1)\,\langle\, A(z+(-1)w), z+(-1)w \,\rangle + (-i)\,\langle\, A(z+(-i)w), z+(-i)w \,\rangle$.

Entonces, como $\langle\, Ax, x \,\rangle = 0$, para todo $x \in \mathbb{C}^n$, vale que $\langle\, Az, w \,\rangle = \langle\, A(z+w), z+w \,\rangle + i\,\langle\, A(z+iw), z+iw \,\rangle + (-1)\,\langle\, A(z+(-1)w), z+(-1)w \,\rangle + (-i)\,\langle\, A(z+(-i)w), z+(-i)w \,\rangle = 0$, para todo $z, w \in \mathbb{C}^n$. Entonces

$$\langle\, (U^*U - I)z, w \,\rangle = 0,$$

para todo $z, w \in \mathbb{C}^n$. En particular, si tomamos $w := (U^*U - I)z$, tenemos que

$$\langle\, (U^*U - I)z, (U^*U - I)z \,\rangle = \|(U^*U - I)z\|^2 = 0,$$

para todo $z \in \mathbb{C}^n$. Entonces

$$(U^*U - I)z = 0,$$

para todo $z \in \mathbb{C}^n$. Por lo tanto $U^*U - I = 0$ ó, equivalentemente, $U^*U = I$ y U resulta unitaria. $\square$

Ejercicio : Pensar cómo se modifica la Propoposición 1, si tenemos U ortogonal en vez de U unitaria.

Matricies hermíticas y diagonalización unitaria

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Diremos que A es *hermítica* si $A^* = A$ y diremos que A es *simétrica*, si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $A^T = A$. Finalmente, diremos que A es *anti simétrica*, si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $A^T = -A$.

Ejemplos:

La matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ es anti simétrica, pues $A^T = -A$.

La matriz $\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ es hermítica, pues $A^* = A$.

Proposición 2. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que A es hermítica, es decir $A^* = A$. Entonces:*

1. *Los autovalores de A son reales.*
2. *Autovectores de A correspondientes a distintos autovalores son ortogonales (con el producto interno canónico).*

Dem. 1. : Supongamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor de A. Entonces, existe $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tal que $Av = \lambda v$. Entonces,

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Av, v \rangle = \langle v, A^* v \rangle = \langle v, Av \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle v, v \rangle .$$

Entonces $(\lambda - \overline{\lambda}) \langle v, v \rangle = 0$. Como $\langle v, v \rangle \neq 0$, pues $v \neq 0$, se sigue que $\lambda = \overline{\lambda}$ y por lo tanto $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. : Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ya probamos que son reales) autovalores distintos de A y sean $v, w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ los autovectores asociados correspondientes. Entonces

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \langle Av, w \rangle = \langle v, A^* w \rangle = \langle v, Aw \rangle = \langle v, \mu w \rangle = \mu \langle v, w \rangle .$$

Entonces,

$$(\lambda - \mu) \langle v, w \rangle = 0.$$

Como $\lambda \neq \mu$, concluimos que $\langle v, w \rangle = 0$ y entonces v y w son ortogonales. □

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Diremos que A es *diagonalizable unitariamente* si existen $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitaria y $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonal (D no tiene porqué ser real) tales que

$$A = UDU^*.$$

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Diremos que A es *diagonalizable ortogonalmente* si existen $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal y $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonal tales que

$$A = UDU^T.$$

Enunciaremos uno de los teoremas más importantes que veremos en la materia:

Teorema 1. *Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermítica, es decir $A^* = A$ entonces A es diagonalizable unitariamente.*

Dem. Lo demostraremos por inducción en n.

Si $n = 1$, entonces $A \in \mathbb{C}$ (es un número) y no hay nada que probar.

Supongamos que $n > 1$ y que para toda matriz $A \in \mathbb{C}^{n-1 \times n-1}$ hermítica vale que A es diagonalizable unitariamente. Veamos que eso mismo vale para $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermítica.

Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es hermítica, por la Proposición 2, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor de A. Sea $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un autovector asociado a λ y tomemos $w := \frac{v}{\|v\|}$, entonces w es un vector de norma 1 asociado al mismo autovalor λ.

Entonces, observar que

$$w^*(Aw) = w^*(\lambda w) = \lambda w^* w = \lambda \|w\|^2 = \lambda.$$

Ahora, definamos $\mathcal{S} := gen\{w\}^{\perp}$. Entonces, recordemos que

$$\dim(\mathcal{S}) = \dim(\mathbb{C}^n) - \dim(gen\{w\}) = n - 1.$$

Además, si $s \in \mathcal{S}$, vale que $As \in \mathcal{S}$. De hecho, si $s \in \mathcal{S} = gen\{w\}^{\perp}$, entonces $\langle s, w \rangle = 0$. Por lo tanto,

$$\langle As, w \rangle = \langle s, A^* w \rangle = \langle s, Aw \rangle = \langle s, \lambda w \rangle = \lambda \langle s, w \rangle = 0.$$

Entonces $As \in gen\{w\}^{\perp} = \mathcal{S}$, que era lo que queríamos ver.

A continuación, completemos el conjunto $\{w\}$ de manera tal que $\mathcal{B} := \{w, v_1, \cdots, v_{n-1}\}$ sea una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$. Entonces, como $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1} \in gen\{w\}^{\perp}$ (son parte de una base ortonormal) por lo que acabamos de probar, vale que $Av_i \in gen\{w\}^{\perp}$ para $i = 1, 2, \cdots, n-1$ y entonces,

$$0 = \langle Av_i, w \rangle = w^* A v_i = \langle w, Av_i \rangle = (Av_i)^* w = v_i^* A^* w = v_i^* A w$$

para $i = 1, 2, \cdots, n-1$. Sea

$$V := [w \ v_1 \ \cdots \ v_{n-1}],$$

(donde $w, v_1, \cdots, v_{n-1}$ son las columnas de V). Entonces, como las columnas de V son una bon de $\mathbb{C}^n$, por la Proposición 1, V es unitaria. Además, usando lo que vimos arriba, se sigue que

$$V^*AV = \begin{bmatrix} w^* \\ v_1^* \\ \vdots \\ v_{n-1}^* \end{bmatrix} A[\ w \ v_1 \ \cdots \ v_{n-1}] = \begin{bmatrix} w^*Aw & w^*Av_1 & \cdots & w^*Av_{n-1} \\ v_1^*Aw & v_1^*Av_1 & \cdots & v_1^*Av_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n-1}^*Aw & v_{n-1}^*Av_1 & \cdots & v_{n-1}^*Av_{n-1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_1^*Av_1 & \cdots & v_1^*Av_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & v_{n-1}^*Av_1 & \cdots & v_{n-1}^*Av_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Llamemos

$$A_1 := \begin{bmatrix} v_1^*Av_1 & \cdots & v_1^*Av_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n-1}^*Av_1 & \cdots & v_{n-1}^*Av_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Entonces, por la cuenta anterior, nos quedó la siguiente matriz en bloques:

$$V^*AV = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}.$$

Observar que $A_1 \in \mathbb{C}^{n-1 \times n-1}$ y $A_1^* = A_1$ (hacer la cuenta usando que $A^* = A$). Entonces, por hipótesis inductiva, A_1 es diagonalizable unitariamente. Es decir, existe $U_1 \in \mathbb{C}^{n-1 \times n-1}$ unitaria y $D_1 \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$ (como A_1 es hermítica sus autovalores son reales) diagonal tales que

$$A_1 = U_1 D_1 U_1^*.$$

Entonces (verificarlo haciendo la cuenta), tenemos que

$$A = V \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} V^* = V \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1^* \end{bmatrix} V^*.$$

Llamemos $U := V \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces, notar que

$$\begin{aligned} U^*U = (V \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix})^* V \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1^* \end{bmatrix} V^*V \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1^* \end{bmatrix} I_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1^* U_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} = I_n. \end{aligned}$$

Entonces U es unitaria y además $U^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1^* \end{bmatrix} V^*$.

Por lo tanto, si llamamos $D := \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & D_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tenemos que D es diagonal y

$$A = UDU^*.$$

Entonces, A resulta diagonalizable unitariamente. □

De manera similar a como probamos el Teorema 1, podemos probar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica, entonces A es diagonalizable ortogonalmente.

Ejercicios de diagonalización unitaria y ortogonal

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (en el sentido de que consideramos $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con coeficientes reales) anti-simétrica, es decir $A = -A^T$. Entonces A es diagonalizable unitariamente.
De hecho, observar que

$$(iA)^* = i^* \, (\overline{A})^T = -iA^T = i(-A^T) = iA.$$

Entonces $iA \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es hermítica. Entonces, por el Teorema 1, existe $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria y $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonal, tales que

$$iA = UDU^*.$$

Entonces,

$$A = -i(iA) = (-i)UDU^* = U(-iD)U^*$$

y por lo tanto A es diagonalizable unitariamente. Observar que como $(-iD) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ los autovalores de A son números complejos puros.

Ejercicio 1: Explicar por qué las siguientes matrices son diagonalizables unitariamente:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; A_4 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dem. Observar que

$$A_1^T = (\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -A_1.$$

Entonces, por lo que acabamos de ver A_1 es diagonalizable unitariamente. De hecho, tenemos que el polinomio característico de A_1 es $p_{A_1}(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Por lo tanto $\lambda_1 = i$ y $\lambda_1 = -i$ son los autovalores de A_1 y como $nul(A_1 - iI) = gen\{\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}\}$ y $nul(A_1 + iI) = gen\{\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}\}$. Entonces

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}\}$$

es una bon de $\mathbb{C}^2$. Tomemos

$$U := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix},$$

entonces U es unitaria y

$$A_1 = U\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}U^*.$$

Observar que

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{bmatrix} + \sin\theta\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \cos\theta\ I_2 + \sin\theta\ A_1.$$

Acabamos de ver, que $A_1 = U\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}U^*$, con $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$ unitaria. Entonces,

$$\begin{aligned} A_2 &= \cos\theta\ I_2 + \sin\theta\ A_1 = \cos\theta\ (UU^*) + \sin\theta\ (U\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}U^*) \\ &= U\begin{bmatrix} \cos\theta + i\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta - i\sin\theta \end{bmatrix}U^* = U\begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}U^* \end{aligned}$$

y entonces A_2 es diagonalizable unitariamente.

Observar que A_3 se puede escribir como la siguiente matriz en bloques:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Acabamos de ver, que $A_1 = UDU^*$, con $D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ y $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$ unitaria. Entonces, definamos la siguiente matriz en bloques

$$V := \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Observar que $V^* = \begin{bmatrix} U^* & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y además

$$V^*V = \begin{bmatrix} U^* & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^*U & 0 \\ 0 & 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

Por lo tanto, V es unitaria. Además,

$$A_3 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} UDU^* & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^* & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} V^*$$

y entonces A_3 es diagonalizable unitariamente.

Por último, de manera similar, observar que A_4 se puede escribir como la siguiente matriz en bloques:

$$A_4 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Acabamos de ver, que $A_2 = U\tilde{D}U^*$, con $\tilde{D} := \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}$ y $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$ unitaria. Entonces, tomando nuevamente la matriz en bloques unitaria $V = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tenemos que

$$A_4 = \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U\tilde{D}U^* & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{D} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^* & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} V^*$$

y entonces A_4 es diagonalizable unitariamente. □

Ejercicio 3: Sea $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz ortogonal con $\det(U) = 1$. Probar que:

a) 1 es autovalor de U.

b) Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una bon de $\mathbb{R}^3$ tal que $Uv_1 = v_1$; entonces en esa base, la matriz de $U(x) := Ux$, $x \in \mathbb{R}^3$ es

$$[U]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

para algún $\theta \in [0, 2\pi)$.

Dem. $a)$: Tener en cuenta que con $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ nos referimos a $U \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ con todos sus coeficientes reales. Por lo tanto, el polinomio característico de A es un polinomio de grado 3 con coeficientes reales, es decir $p_A \in \mathbb{R}_3[\lambda]$. Por el Teorema Fundamental del Álgebra, p_A tiene 3 raíces y como los coeficientes de p_A son reales, hay dos opciones:

1. Las 3 raíces de p_A son reales.

2. El polinomio característico p_A tiene 1 raíz real y dos raíces complejas conjugadas.

Conclusión, p_A al menos tiene una raíz $\lambda \in \mathbb{R}$ y por lo tanto, U tiene al menos un autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$. Veamos que en este caso, $\lambda = 1$.

Primero observemos que cualquier autovalor de una matriz ortogonal tiene módulo 1: de hecho, como $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es ortogonal, vale que $U^TU = I$. Entonces, si $\lambda \in \mathbb{C}$ es autovalor de U, existe $v \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ tal que $Uv = \lambda v$. Entonces,

$$\langle v, v \rangle = \left\langle U^TUv, v \right\rangle = \langle Uv, Uv \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda\overline{\lambda} \langle v, v \rangle = |\lambda| \langle v, v \rangle .$$

Como $\langle v, v \rangle \neq 0$, entonces $|\lambda| = 1$ y probamos que cualquier autovalor de una matriz ortogonal tiene módulo 1.

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ los autovalores de U. Entonces, usando la hipótesis,

$$1 = \det(U) = \lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3.$$

Sabemos que al menos un autovalor de U es real, supongamos que $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Entonces, como $|\lambda_1| = 1$, tenemos que $\lambda_1 = \pm 1$. Si λ_2 y λ_3 son también reales, de la misma manera, tenemos que $\lambda_2 = \pm 1$ y $\lambda_3 = \pm 1$. Pero entonces, usando que $1 = \det(U) = \lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$, no queda otra que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ó $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ (es decir los 3 autovalores son iguales a 1 ó hay un autovalor igual a 1 y los otros dos iguales a -1). Por lo tanto, en ese caso, probamos que 1 es un autovalor de U como queríamos ver.

Ahora, si estamos en el otro caso, es decir, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ pero $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$. Tenemos que $\lambda_2 = \overline{\lambda_3}$. Entonces, usando que $|\lambda_2| = 1$ y que $1 = \det(U) = \lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$, se sigue que

$$1 = \det(U) = \lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3 = \lambda_1\ \lambda_2\ \overline{\lambda_2} = \lambda_1 |\lambda_2| = \lambda_1 \cdot 1 = \lambda_1.$$

Por lo tanto, en este caso, también tenemos que 1 es un autovalor de U como queríamos ver.

b) : A partir de ahora, consideremos la transformación lineal $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$U(x) := Ux,$$

donde $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es una matriz ortogonal tal que $U^TU = I$. Entonces, recordar que si $\mathcal{E}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, vale que $[U]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = U$.

Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una bon de $\mathbb{R}^3$ tal que $Uv_1 = v_1$. Entonces v_1 es un autovector asociado a $\lambda_1 = 1$ (que ya vimos que es un autovalor posible). Por otra parte, como $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una bon de $\mathbb{R}^3$, tenemos que $gen\{v_2, v_3\} = gen\{v_1\}^\perp$. Entonces, usando que $v_1 = Uv_1$, tenemos que

$$\langle U(v_2), v_1 \rangle = \langle Uv_2, Uv_1 \rangle = \left\langle v_2, U^TUv_1 \right\rangle = \langle v_2, v_1 \rangle = 0.$$

Entonces $U(v_2) \in gen\{v_1\}^\perp = gen\{v_2, v_3\}$. De la misma manera,

$$\langle U(v_3), v_1 \rangle = \langle Uv_3, Uv_1 \rangle = \left\langle v_3, U^TUv_1 \right\rangle = \langle v_3, v_1 \rangle = 0.$$

Entonces $U(v_3) \in gen\{v_1\}^\perp = gen\{v_2, v_3\}$.

Por lo tanto, existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $U(v_2) = av_2 + bv_3$ y $U(v_3) = cv_2 + dv_3$. Entonces, como U es unitaria, por la Proposición 1, tenemos que

$$1 = \langle v_2, v_2 \rangle = \langle Uv_2, Uv_2 \rangle = \langle av_2 + bv_3, av_2 + bv_3 \rangle = a^2 + b^2,$$

$$1 = \langle v_3, v_3 \rangle = \langle Uv_3, Uv_3 \rangle = \langle cv_2 + dv_3, cv_2 + dv_3 \rangle = c^2 + d^2 \text{ y}$$

$$0 = \langle v_2, v_3 \rangle = \langle Uv_2, Uv_3 \rangle = \langle av_2 + bv_3, cv_2 + dv_3 \rangle = ac + bd.$$

Entonces $ac = -bd$.

Por lo tanto, reemplazando y resolviendo, nos queda que

$$(1 - b^2)c^2 = a^2c^2 = b^2d^2 = b^2(1 - c^2).$$

Entonces $c^2 - b^2c^2 = b^2 - b^2c^2$, por lo tanto $c^2 = b^2$ y tomando raíz nos queda que $c = \pm b$. De la misma manera,

$$a^2(1 - d^2) = a^2c^2 = b^2d^2 = (1 - a^2)d^2.$$

Entonces $a^2 = d^2$ y tomando raíz nos queda que $a = \pm d$.

Como $ac = -bd$, finalmente nos queda que

$$a = d \text{ y } c = -b \text{ ó } a = -d \text{ y } c = b.$$

Entonces, reemplazando, nos queda que

$$U(v_3) = cv_2 + dv_3 = -bv_2 + av_3 \text{ ó } U(v_3) = cv_2 + dv_3 = bv_2 - av_3.$$

Por lo tanto,

$$[U]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [[U(v_1)]^{\mathcal{B}}\ [U(v_2)]^{\mathcal{B}}\ [U(v_3)]^{\mathcal{B}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{bmatrix}$$

ó

$$[U]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [[U(v_1)]^{\mathcal{B}}\ [U(v_2)]^{\mathcal{B}}\ [U(v_3)]^{\mathcal{B}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & -a \end{bmatrix}.$$

Recordemos que

$$U = [U]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\ [U]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\ (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}})^{-1}.$$

Entonces

$$1 = \det(U) = \det([U]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}).$$

Por lo tanto, como $\det(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & -a \end{bmatrix}) = -a^2 - b^2 = -1$ esa no puede ser la matriz de U en la base $\mathcal{B}$ y no queda otra que,

$$[U]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [[U(v_1)]^{\mathcal{B}}\ [U(v_2)]^{\mathcal{B}}\ [U(v_3)]^{\mathcal{B}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{bmatrix}.$$

Finalmente, como $a^2 + b^2 = 1$, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $a = \cos\theta$ y $b = \sin\theta$. Por lo tanto

$$[U]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

y probamos lo que queríamos.

$\square$

Observar que si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una bon de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[U]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Entonces, en ese caso,

1. Si $\theta = 0$, se sigue que $U = I$ y los autovalores de U son (obviamente) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$,
2. Si $\theta = \pi$, los autovalores de U son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.
3. Para otros valores de θ, los autovalores de U son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ con $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$.

Ejercicio 5: Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $v_1 = [1\ 1\ 1]^T, v_2 = [1\ -1\ 0]^T,\ v_3 = [0\ 1\ -1]^T$, es una base de autovectores de A asociados a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, respectivamente. Probar que A es simétrica si y sólo si $\lambda_2 = \lambda_3$.

Dem. Supongamos que A es simétrica. Entonces $A = A^T$. Entonces, usando que $Av_2 = \lambda_2 v_2$, $Av_3 = \lambda_3 v_3$ y que $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ se sigue que

$$\lambda_2 \langle v_2, v_3 \rangle = \langle \lambda_2 v_2, v_3 \rangle = \langle Av_2, v_3 \rangle = \left\langle v_2, A^T v_3 \right\rangle = \langle v_2, Av_3 \rangle = \langle v_2, \lambda_3 v_3 \rangle = \lambda_3 \langle v_2, v_3 \rangle .$$

Entonces, como $\langle v_2, v_3 \rangle = v_3^T v_2 = -1$, tenemos que

$$0 = (\lambda_2 - \lambda_3) \langle v_2, v_3 \rangle = (\lambda_2 - \lambda_3)(-1) = \lambda_3 - \lambda_2.$$

Por lo tanto $\lambda_2 = \lambda_3$.

Recíprocamente, supongamos que $\lambda_2 = \lambda_3$. Entonces, como $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base $\mathbb{R}^3$ y además

$$\langle av_1, bv_2 + cv_3 \rangle = ab \langle v_1, v_2 \rangle + ac \langle v_1, v_3 \rangle = ab(v_1^T v_2) + ac(v_1^T v_2) = 0,$$

para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$gen\{v_1\} = gen\{v_2, v_3\}^{\perp}.$$

Entonces, $\mathcal{S}_{\lambda=\lambda_1} = gen\{v_1\}$ y $\mathcal{S}_{\lambda=\lambda_2} = gen\{v_2, v_3\}$. Busquemos bases ortonormales de ambos autoespacios. Por un lado, $\{\frac{1}{\sqrt{3}}[1\ 1\ 1]^T\}$ es una bon de $\mathcal{S}_{\lambda=\lambda_1}$ y, usando el algoritmo de Gram-Schmid, podemos obtener una bon del autoespacio $\mathcal{S}_{\lambda=\lambda_2}$. De hecho, tomamos $u_2 = v_2 = [1\ -1\ 0]^T$ y

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle u_2, v_3 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = [0\ 1\ -1]^T - \frac{-1}{2}[1\ -1\ 0]^T = [\frac{1}{2}\ \frac{1}{2} - 1]^T.$$

Entonces $\{\frac{1}{\sqrt{2}}[1\ -1\ 0]^T, \frac{1}{\sqrt{6}}[1\ 1 - 2]^T\}$ es una bon de $\mathcal{S}_{\lambda=\lambda_2}$.

Tomemos $U := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$. Entonces, como las columnas de U son una bon de $\mathbb{R}^3$, por la Proposición 1, U es una matriz ortogonal y además, tenemos que

$$A = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} U^T.$$

Entonces

$$A^T = (U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} U^T)^T = (U^T)^T (\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix})^T U^T = U \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} U^T = A$$

y A resulta simétrica. $\square$

Matrices equivalentes y unitariamente equivalentes

Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Diremos que A y B son *equivalentes*, y lo notamos $A \approxeq B$, si existe una matriz $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversible tal que

$$A = PBP^{-1}.$$

Diremos que A y B son *unitariamente equivalentes*, y lo notamos $A \sim B$, si existe una matriz $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria tal que

$$A = UBU^*.$$

Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces, Como $A = I_n A I_n$, y I_n es unitaria, se sigue que

$$A \sim A.$$

Si $A \sim B$, entonces $A = UBU^*$, para cierta U unitaria. Entonces

$$U^*AU = U^*UBU^*U = B,$$

y entonces, como U^* también es una matriz unitaria, se sigue que $B \sim A$.
Finalmente, si $A \sim B$ y $B \sim C$, tenemos que $A = UBU^*$, para cierta U unitaria y $B = VCV^*$ para cierta V unitaria. Entoces $A = UBU^* = UVCV^*U^*$. Sea $W := UV$, entonces $W^* = V^*U^*$ y $W^*W = UVV^*U^* = U^*IU = U^*U = I$, entonces W es unitaria y tenemos que

$$A = WCW^*,$$

por lo tanto $A \sim C$.
Como se cumplen las tres propiedades que vimos, se dice que la relación $\sim$ es *reflexiva*, *simétrica* y *transitiva*.

Las mismas propiedades que demostramos para la relación $\sim$, se pueden demostrar de manera similar para la relación $\approxeq$. Se deja como ejercicio dicha demostración.

La siguiente observación es inmediata:

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces:

- A es **diagonalizable** si y sólo si existe $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonal, tal que
$$A \approxeq D.$$
- A es **diagonalizable unitariamente** si y sólo si existe $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonal, tal que
$$A \sim D.$$

Recordemos que si en $\mathbb{C}^{n\times n}$ definimos la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}$, por

$$\langle A, B \rangle := \operatorname{tr}(B^* A)$$

entonces $\mathbb{C}^{n\times n}$ resulta un espacio euclídeo. La norma inducida por dicho producto interno

$$\|A\|_F := \operatorname{tr}(A^* A)^{1/2},$$

se denomina *norma de Frobenius.*

Proposición 3. *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $A \sim B$. Entonces:*

i) $\det(A) = \det(B)$,

ii) $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$,

iii) $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$,

iv) A y B tienen los mismos autovalores y además
$$m_a^A(\lambda) = m_a^B(\lambda) \text{ y } m_g^A(\lambda) = m_g^B(\lambda),$$
para todo λ autovalor de A (y de B).

v) La norma de Frobenius de A y B coinciden.

Dem. Si $A \sim B$, entonces $A = UBU^*$ para cierta $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria, es decir $U^* = U^{-1}$. Entonces:

i): $\det(A) = \det(UBU^*) = \det(U)\det(B)\det(U^*) = \det(U)\det(B)\det(U^{-1}) = \det(B)$.

ii): $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(UBU^*) = \operatorname{tr}(U^*UB) = \operatorname{tr}(IB) = \operatorname{tr}(B)$.

iii) : $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(UBU^* - \lambda I) = \det(U(B - \lambda I)U^*) = \det(U)\det(U^*)\det(B - \lambda I) = \det(B - \lambda I) = p_B(\lambda)$.

iv) : Por el ítem iii), como $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$, tenemos que los polinomios característicos de A y B tienen las mismas raíces con las mismas multiplicidades. Entonces, λ es un autovalor de A con cierta multiplicidad algebraica si y sólo si λ es un autovalor de B con la misma multiplicidad algebraica.

Por otra parte, observar que como U es una matriz inversible, vale que

$$col(UBU^* - \lambda I) = col(U(B - \lambda I)U^*) = col(U(B - \lambda I)) \text{ y}$$

$$nul(U(B - \lambda I)) = nul(B - \lambda I).$$

Supongamos que λ es un autovalor de A. Entonces, por un lado λ es también un autovalor de B y además, usando el Teorema de la dimensión, tenemos que

$$\begin{aligned} m_g^A(\lambda) &= \dim(nul(A - \lambda I)) = \dim(nul(UBU^* - \lambda)) = n - \dim(col(UBU^* - \lambda I)) \\ &= n - \dim(col(U(B - \lambda I)) = \dim(nul(U(B - \lambda I)) = dim(nul(B - \lambda I)) = m_g^B(\lambda). \end{aligned}$$

$v)$: Finalmente,

$$\begin{aligned} \|A\|_F^2 &= \operatorname{tr}(A^*A) = \operatorname{tr}((UBU^*)^*(UBU^*)) = \operatorname{tr}(UB^*U^*UBU^*) = \operatorname{tr}(UB^*BU^*) \\ &= \operatorname{tr}(BB^*(U^*U)) = \operatorname{tr}(B^*B) = \|B\|_F^2. \end{aligned}$$

□

> Los ítems $i)$ a $iv)$ de la Proposición anterior siguen valiendo si tenemos $A \approx B$, pero en este caso, en general el item $v)$ no vale. **La vuelta de la Proposición anterior, en general es falsa**.

Se deja como ejercicio probar que los ítems $i)$ a $iv)$ de la Proposición anterior siguen valiendo si tenemos $A \approxeq B$.

Veamos que $v)$ **no vale en general si sólo tenemos** $A \approxeq B$.

Por ejemplo, observar que si $A := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $A = PBP^{-1}$. Entonces $A \approxeq B$. Sin embargo

$$\|A\|_F^2 = \operatorname{tr}(A^*A) = 6 \neq 5 = \operatorname{tr}(B^*B) = \|B\|_F^2$$

y $v)$ no vale.

Veamos por último que **la vuelta de la Proposición anterior, en general es falsa**. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observar que, $\det(A) = 0 = \det(B)$, $\operatorname{tr}(A) = 0 = \operatorname{tr}(B)$, $p_A(\lambda) = \lambda^4 = p_B(\lambda)$. Entonces, $\lambda = 0$ es el único autovalor de A y B y $m_a^A(\lambda = 0) = 4 = m_a^B(\lambda = 0)$. Por otra parte,

$$m_g^A(\lambda = 0) = \dim(nul(A)) = \dim(nul(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix})) = 2 \text{ y}$$

$$m_g^B(\lambda = 0) = \dim(nul(B)) = \dim(nul(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix})) = 2.$$

Finalmente,

$$\|A\|_F^2 = \mathrm{tr}(A^*A) = 2 = \mathrm{tr}(B^*B) = \|B\|_F^2.$$

Por lo tanto, tenemos que los ítems i), ii), iii), iv) y v) de la Proposición 3 se cumplen.

Observar que $A^2 = 0$. Pero $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Entonces, $B \not\sim A$, porque si existiera U unitaria tal que $B = UAU^*$, tendríamos que

$$0 \neq B^2 = (UAU^*)UAU^* = UAU^*UAU^* = UA^2U^* = U0U^* = 0,$$

lo cual es absurdo. Usando el mismo argumento, se sigue que además $B \not\approx A$. Por lo tanto **la vuelta de la Proposición anterior, en general es falsa**.

Ejercicio 2: Determinar cuáles de las siguientes parejas de matrices son unitariamente equivalentes:

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Dem. c): Observar que $\mathrm{tr}(A) = 2 \neq 0 = \mathrm{tr}(B)$. Entonces, por la Proposición 3, A no puede ser unitariamente equivalente (ni siquiera equivalente) a B.

d): Observar que $\det(A) = -1 \neq -\frac{1}{4} = \det(B)$. Entonces, por la Proposición 3, A no puede ser unitariamente equivalente (ni siquiera equivalente) a B.

f): Observar que $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$. Entonces, los autovalores de A son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Por lo tanto, como los tres autovalores de A son distintos, A es diagonalizable. Si $D := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = B$, tenemos que $A \approx D = B$. Es decir, A es equivalente a B. Sin embargo,

$$\|A\|_F^2 = \mathrm{tr}(A^*A) = 19 \neq 14 = \mathrm{tr}(B^*B) = \|B\|_F^2.$$

Entonces, por la Proposición 3, A no puede ser unitariamente equivalente a B. $\square$

Inercia de un matriz y Lema de inercia

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz hermítica. La *inercia* de A es la terna

$$In(A) = (i_+(A), i_-(A), i_0(A)),$$

donde $i_+(A)$ es la cantidad de autovalores positivos de A (contados con multiplicidad), $i_-(A)$ es la cantidad de autovalores negativos de A (contados con multiplicidad), $i_0(A)$ es la cantidad de autovalores nulos de A (contados con multiplicidad). Claramente

$$i_+(A) + i_-(A) + i_0(A) = n.$$

El siguiente ejercicio es una prueba de un resultado muy importante conocido como *Lema de inercia de Sylvester*.

Ejercicio 8: Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermíticas. Probar que $In(A) = In(B)$ si y sólo si existe una matriz inversible S tal que $A = SBS^*$.

Antes de probar el si y sólo si del ejercicio, veamos una manera conveniente de escribir una matriz hermítica A cuya inercia $In(A)$ está dada por los números (p, q, r).

Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es hermítica entonces, por el Teorema 1, existen $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria y $\Lambda := diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonal (donde $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ son los autovalores de A) tales que

$$A = U\Lambda U^*.$$

Supongamos que $In(A) = (p, q, r)$, donde p es la cantidad de autovalores de A positivos (contados con multiplicidad), q la cantidad de autovalores de A negativos (contados con multiplicidad) y r la cantidad de autovalores de A nulos (contados con multiplicidad). Obviamente $p+q+r = n$ y podemos ordenar los autovalores de A de la siguiente manera: $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_p > 0$, $\lambda_{p+1} \leq \cdots \leq \lambda_{p+q} < 0$, y $\lambda_{p+q+1} = \cdots = \lambda_n = 0$. Entonces, definamos las siguientes matrices

$$\Lambda_+ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times p}, \quad \Lambda_- = \begin{bmatrix} \lambda_{p+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{p+q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q\times q}.$$

Entonces, la matriz Λ (diagonal) nos quedaría como la siguiente matriz en bloques:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_+ & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_- & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix}.$$

Donde 0_r es la matriz nula de $r \times r$.

Ahora, llamemos

$$D_+ := \begin{bmatrix} \lambda_1^{1/2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_p^{1/2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times p}, \quad D_- := \begin{bmatrix} |\lambda_{p+1}|^{1/2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & |\lambda_{p+q}|^{1/2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q\times q}.$$

Entonces, la matriz $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida en bloques por

$$D := \begin{bmatrix} D_+ & 0 & 0 \\ 0 & D_- & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix},$$

es una matriz inversible (es una matriz diagonal con elementos positivos no nulos en su diagonal). Además, observar que

$$\begin{aligned} D \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_{r\times r} \end{bmatrix} D^* &= \begin{bmatrix} D_+ & 0 & 0 \\ 0 & D_- & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_{r\times r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_+ & 0 & 0 \\ 0 & D_- & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} D_+^2 & 0 & 0 \\ 0 & -D_-^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_+ & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_- & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces, volviendo a la diagonalización de A tenemos que

$$A = U\Lambda U^* = UD \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix} D^* U^*.$$

Sea $T := UD$, entonces como U y D son matrices inversibles (y el producto de matrices inversibles es inversible), tenemos que $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es inversible y tenemos que

$$A = T \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix} T^*. \tag{1}$$

Recordemos que si T es una matriz inversible, entonces T^* también es inversible y además vale que

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

Entonces, multiplicando la ecuación (1) a izquierda por T^{-1} y a derecha por $(T^*)^{-1}$, también tenemos que

$$T^{-1}A(T^*)^{-1} = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_{r\times r} \end{bmatrix}.$$

Ahora sí, probemos el si y sólo si del ejercicio:

Dem. $\Rightarrow)$: Supongamos que $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es también una matriz hermítica con $In(B) = In(A) = (p, q, r)$. Entonces, operando como hicimos arriba para A, tenemos que existe una matriz $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversible tal que

$$B = V \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix} V^*. \tag{2}$$

Entonces, multiplicando la ecuación (2) a izquierda por V^{-1} y a derecha por $(V^*)^{-1}$, tenemos que

$$V^{-1}B(V^*)^{-1} = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix} = T^{-1}A(T^*)^{-1}. \tag{3}$$

Ahora, si multiplicamos la ecuación (3) a izquierda por T y a derecha por T^*, tenemos que

$$A = T(T^{-1}A(T^*)^{-1})T^* = T(V^{-1}B(V^*)^{-1})T^* = (TV^{-1})B((V^*)^{-1}T^*).$$

Llamemos $S := TV^{-1}$, entonces S es inversible (pues es el producto de dos matrices inversibles) y además $S^* = (TV^{-1})^* = (V^{-1})^*T^* = (V^*)^{-1}T^*$. Entonces

$$A = SBS^*$$

y probamos lo que queríamos.

$\Leftarrow)$: Para la vuelta vamos a tener que arremangarnos un poco.

Supongamos que existe una matriz S inversible tal que $A = SBS^*$.

Sean $In(A) = (p, q, r)$ y $In(B) = (p', q', r')$ las inercias de A y B respectivamente. Queremos ver que $p = p',\ q = q'$ y $r = r'$.

En primer lugar, veamos que $rg(A) = rg(B)$. De hecho, recordar que como S y S^* son inversibles, se sigue que (hacer la cuenta)

$$col(A) = col(SBS^*) = col(SB) \text{ y } nul(SB) = nul(B).$$

Entonces, por el Teorema de la dimensión, tenemos que

$$rg(A) = \dim(col(A)) = \dim(col(SB)) = n - \dim(nul(SB)) = n - \dim(nul(B)) = rg(B).$$

Entonces, también tenemos que

$$\dim(nul(A))) = n - rg(A) = n - rg(B) = \dim(nul(B)).$$

Recoremos que si $\lambda = 0$ es un autovalor de A, entonces la multiplicidad geométrica de $\lambda = 0$ es

$$m_g^A(\lambda = 0) = \dim(nul(A)).$$

Como A y B son hermíticas (y por lo tanto diagonalizables) tenemos que las multiplicidades geométricas y algebraicas de sus autovalores (en particular del autovalor $\lambda = 0$) coinciden. Entonces,

$$r = m_a^A(\lambda = 0) = m_g^A(\lambda = 0) = \dim(nul(A))) = \dim(nul(B)) = m_g^B(\lambda = 0) = m_a^B(\lambda = 0) = r'.$$

Es decir, probamos que $r = r'$. Entonces, como $p + q + r = p' + q' + r' = n$, se sigue que

$$p + q = n - r = n - r' = p' + q'.$$

Entonces, sólo nos resta ver que $p = p'$, porque en ese caso, es automático que $q = q'$.

Recordemos que antes de la demostración de este ejercicio vimos que, como A y B son matrices hermíticas, entonces existen matrices $T, V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversibles, tales que

$$A = T \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix} T^* \text{ y } B = V \begin{bmatrix} I_{p'} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{q'} & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix} V^*.$$

Entonces, si $A = SBS^*$, multiplicando a izquierda por S^{-1} y a derecha por $(S^*)^{-1}$, tenemos que

$$S^{-1}A(S^*)^{-1} = B.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_{p'} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{q'} & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix} &= V^{-1}B(V^*)^{-1} = V^{-1}S^{-1}A(S^*)^{-1}(V^*)^{-1} \\ &= V^{-1}S^{-1}T \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix} T^*(S^*)^{-1}(V^*)^{-1}. \end{aligned}$$

Si llamamos $F := V^{-1}S^{-1}T$, entonces F es inversible (es el producto de tres matrices inversibles) y vale que

$$\begin{bmatrix} I_{p'} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{q'} & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix} F^*.$$

Veamos entonces que $p = p'$. Supongamos que no, es decir, supongamos que $p' > p$. Entonces,

$$q = (p' - p) + q > 0 + q' = q'.$$

Sean

$$U_1 := gen\{e_{p+1}, \cdots, e_{p+q}\} \text{ y } W := gen\{e_1, \cdots, e_{p'}, e_{p'+q'+1}, \cdots, e_n\},$$

donde e_i es el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{C}^n$.

Claramente $\dim(U_1) = q$ y si $u \in U_1 \setminus \{0\}$, entonces existen $a_{p+1}, \cdots, a_{p+q} \in \mathbb{C}$ no todos nulos, tales que $u = a_{p+1}e_{p+1} + \cdots + a_{p+q}e_{p+q} = [0 \cdots 0 \ a_{p+1} \cdots \ a_{p+q} \ 0 \cdots 0]^T$. Entonces

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix} u, u \right\rangle = \\ &= \left\langle [0 \cdots 0 \ -a_{p+1} \cdots \ -a_{p+q} \ 0 \cdots 0]^T, [0 \cdots 0 \ a_{p+1} \cdots \ a_{p+q} \ 0 \cdots 0]^T \right\rangle \\ &= -\overline{a_{p+1}}a_{p+1} - \cdots - \overline{a_{p+q}}a_{p+q} \\ &= -|a_{p+1}|^2 - \cdots - |a_{p+q}|^2 < 0. \end{aligned}$$

Claramente, también tenemos que $\dim(W) = p' + r = n - q'$, y si $w \in W \setminus \{0\}$, entonces existen $b_1, \cdots, b_{p'}, b_{p'+q'+1}, \cdots, b_n \in \mathbb{C}$ no todos nulos, tales que

$$w = b_1e_{p+1} + \cdots + b_{p'}e_{p'} + b_{p'+q'+1}e_{p'+q'+1} + \cdots + b_ne_n = [b_1 \cdots b_{p'} \ 0 \cdots 0 \ b_{p'+q'+1} \cdots \ b_n]^T.$$

Entonces, operando de manera similar,

$$\left\langle F \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix} F^* w, w \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix} F^* w, F^* w \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} I_{p'} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{q'} & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix} w, w \right\rangle = |b_1|^2 + \cdots + |b_{p'}|^2 > 0.$$

Sea

$$U_2 := \{F^* w : w \in W\} = F^*(W),$$

entonces, recordemos que como F^* es una matriz inversible, se sigue que (demostrarlo)

$$\dim(U_2) = \dim(F^*(W)) = \dim(W) = n - q'.$$

Entonces, usando el Teorema de la dimensión para la suma de subespacios, tenemos que

$$n = n + 0 < n + (q - q') = q + (n - q') = \dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2).$$

Entonces, como obivamente $\dim(U_1 + U_2) \leq n$, se sigue que

$$\dim(U_1 \cap U_2) > n - \dim(U_1 + U_2) \geq n - n = 0.$$

Entonces $\dim(U_1 \cap U_2) > 0$ y existe $v \neq 0$ tal que $v \in U_1 \cap U_2$. Pero entonces, como $v \in U_1 \setminus \{0\}$, vimos que vale que

$$\left\langle \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix} v, v \right\rangle < 0,$$

y como $v \in U_2 \setminus \{0\}$, existe $w \in W \setminus \{0\}$ tal que $v = F^* w$ y vimos que

$$\left\langle \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix} v, v \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix} F^* w, F^* w \right\rangle > 0.$$

Entonces, llegamos a un absurdo. Por lo tanto, concluimos que $p' \not> p$. Operando de la misma manera, se prueba que $p \not> p'$. Entonces $p = p'$ y, como $p + q = p' + q'$, se sigue que $q = q'$ y tenemos que $In(A) = (p, q, r) = (p', q', r') = In(B)$. $\square$

Ejercicio 9: Se resuelve aplicando los razonamientos que hicimos antes de la demostración del **Ejercicio 8**.